LA RICORSIONE

- Una funzione matematica è definita ***ricorsivamente*** quando nella sua definizione compare un riferimento a se stessa

- La ricorsione consiste nella possibilità di *definire una funzione* *<u>in termini di se stessa.</u>*

- È basata sul *<u>principio di induzione</u>* matematica:
  - se una proprietà P vale per $n=n_0$ ⟹ CASO BASE
  - e si può provare che, *assumendola valida per n*, allora vale per n +1

  allora P vale per ogni $n \geq n_0$

LA RICORSIONE

- **Operativamente, risolvere un problema con un approccio ricorsivo comporta**
  - **di identificare un "caso base" la cui soluzione sia nota**
  - **di riuscire a esprimere la soluzione al caso generico *n* in termini dello *stesso problema* *in uno o più casi più semplici*** (n-1, n-2, etc).

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Esempio: il fattoriale di un numero

```
fact(n) = n!
n!: Z → N
    n! vale 1            se n ≤ 0
    n! vale n*(n-1)!     se n > 0
```

Codifica:

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
….
    fz = fact(z-2);
…
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
}
```

Si valuta l'espressione che costituisce il parametro attuale (nell'environment del main) e si trasmette alla funzione fatt una copia del valore così ottenuto (3).

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

La funzione fact lega il parametro n a 3. Essendo 3 positivo si passa al ramo else. Per calcolare il risultato della funzione e' necessario effettuare una nuova chiamata di funzione `fact(2)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

La funzione fact lega il parametro n a 3. Essendo 3 positivo si passa al ramo else. Per calcolare il risultato della funzione e' necessario effettuare una nuova chiamata di funzione. n-1 nell'environment di fact vale 2 quindi viene chiamata `fact(2)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 2. Essendo 2 positivo si passa al ramo else. Per calcolare il risultato della funzione e' necessario effettuare una nuova chiamata di funzione. n-1 nell'environment di fact vale 1 quindi viene chiamata `fact(1)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 1. Essendo 1 positivo si passa al ramo else. Per calcolare il risultato della funzione e' necessario effettuare una nuova chiamata di funzione. n-1 nell'environment di fact vale 0 quindi viene chiamata `fact(0)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 0. La condizione n <=0 e' vera e la funzione `fact(0)` *torna come risultato 1 e termina.*

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(1)` *che puo' valutare l'espressione n * 1 (valutando n nel suo environment dove vale 1) ottenendo come risultato 1 e terminando.*

LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(2)` *che puo' valutare l'espressione n * 1 (valutando n nel suo environment dove vale 2) ottenendo come risultato 2 e terminando.*

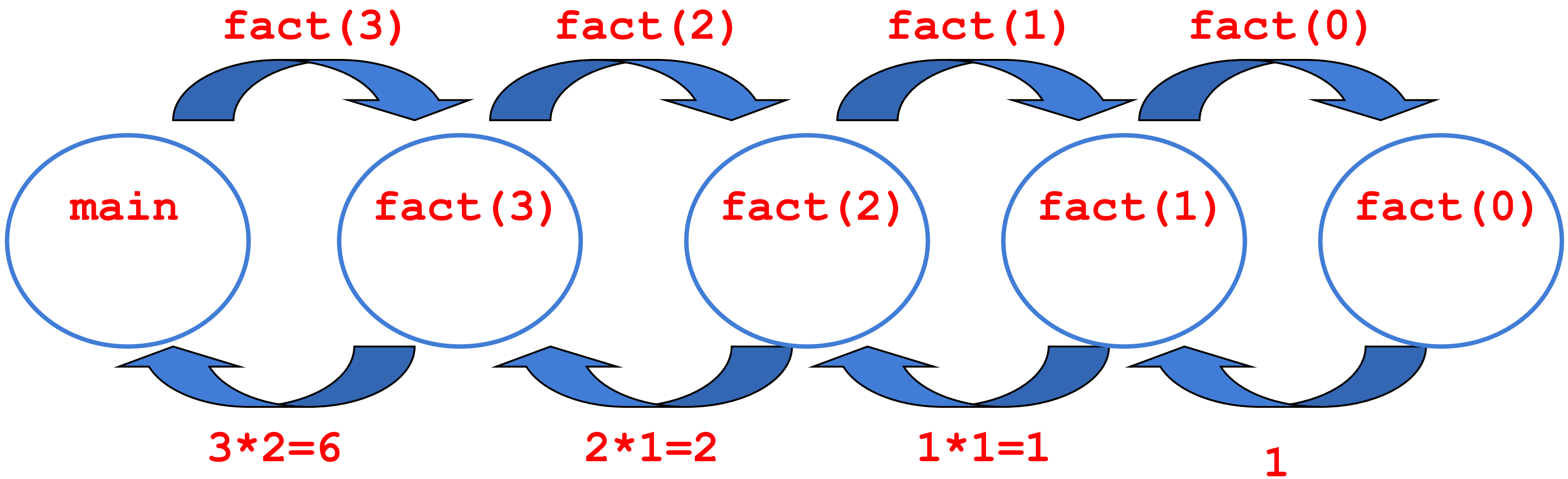
LA RICORSIONE: ESEMPIO

- **Servitore & Cliente:**

```
int fact(int n) {
    if (n<=0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
main(){
    int fz,f6,z = 5;
    fz = fact(z-2);
    }
```

Il controllo torna al servitore precedente `fact(3)` *che puo' valutare l'espressione n * 2 (valutando n nel suo environment dove vale 3) ottenendo come risultato 6 e terminando.*
IL CONTROLLO PASSA AL MAIN CHE ASSEGNA A fz IL VALORE 6

LA RICORSIONE: ESEMPIO



main	fact(3)	fact(2)	fact(1)	fact(0)
Cliente di fact(3)	Cliente di fact(2) Servitore del main	Cliente di fact(1) Servitore di fact(3)	Cliente di fact(0) Servitore di fact(2)	Servitore di fact(1)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

<u>Specifica:</u>

Considera la somma 1+2+3+...+(N-1)+N come composta di due termini:

- (1+2+3+...+(N-1)) → ***Il primo termine non è altro che lo stesso problema in un caso più semplice: calcolare la somma dei primi N-1 interi***
- N → ***Valore noto***

<u>Esiste un caso banale</u> ovvio: CASO BASE

- la somma fino a 1 vale 1.

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

<u>Algoritmo ricorsivo</u>

Se N vale 1 allora la somma vale 1

altrimenti la somma vale N + il risultato della somma dei primi N-1 interi

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Codifica:

```
int sommaFinoA(int n){
 if (n==0) return 0;
     else return sommaFinoA(n-1)+n;
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

$$
\mathrm{fib}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ \mathrm{fib}(n-1) + \mathrm{fib}(n-2), & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

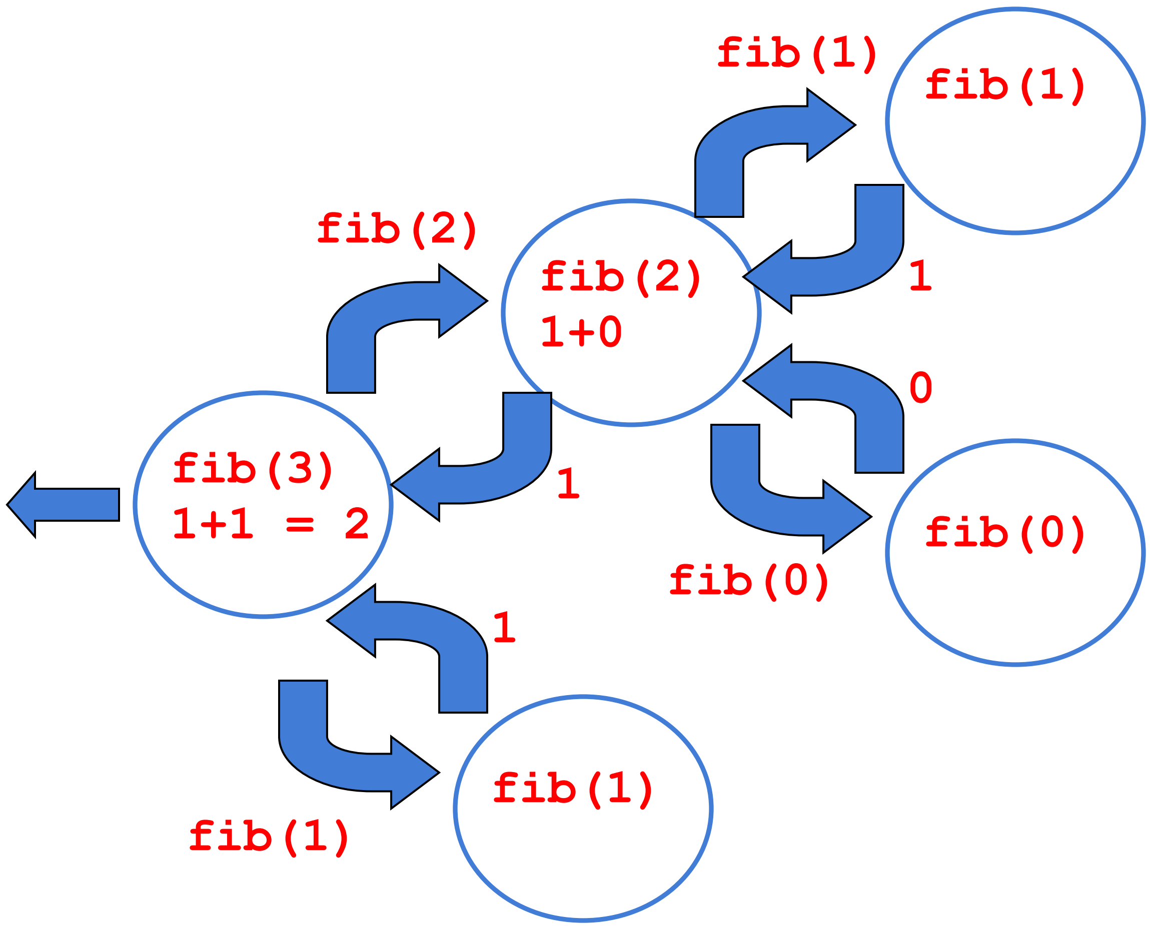
Codifica:

```
unsigned fibonacci(unsigned n) {
  if (n<2) return n;
  else return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);
}
```

Ricorsione non lineare: ogni invocazione del servitore causa <u>due</u> nuove chiamate al servitore medesimo.

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Valore di ritorno: 2



UNA RIFLESSIONE

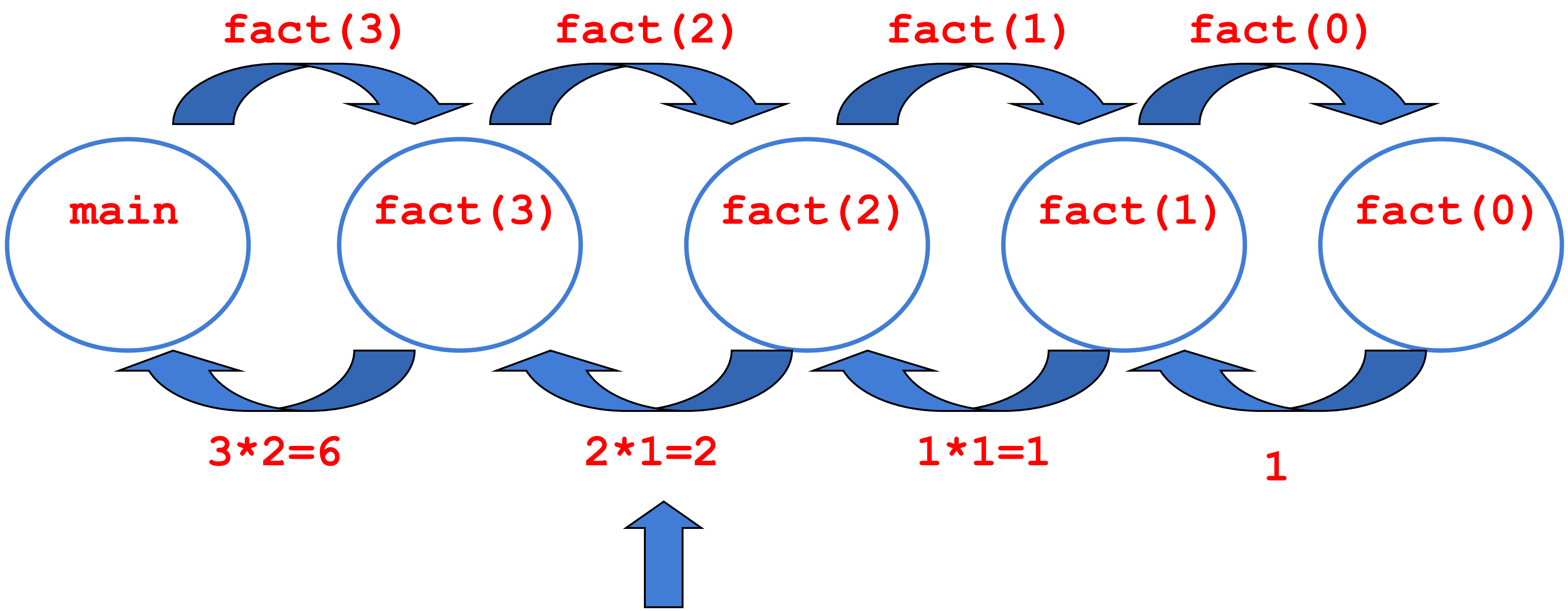
- Negli esempi visti finora si inizia a sintetizzare il risultato solo dopo che si sono aperte tutte le chiamate, *"a ritroso"*, mentre le chiamate si chiudono.

> *Le chiamate ricorsive decompongono via via il problema, ma non calcolano nulla*

- Il risultato viene sintetizzato *a partire dalla fine, perché prima occorre arrivare al caso "banale"*:
  - il caso "banale" fornisce il valore di partenza
  - poi si sintetizzano, "a ritroso", i successivi risultati parziali.

Processo computazionale effettivamente ricorsivo

LA RICORSIONE



PASSI:

1) **`fact(3)`** chiama **`fact(2)`** passandogli il controllo,
2) **`fact(2)`** calcola il fattoriale di 2 e termina restituendo 2
3) **`fact(3)`** riprende il controllo ed effettua la moltiplicazione 3*2
4) termina anche **`fact(3)`** e torna il controllo al main

FATTORIALE ITERATIVO

- Abbiamo visto il calcolo del fattoriale di un numero N tramite procedimento iterativo. Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n){
      int i;
      int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
      for (i=2;i <= n; i++)
        F=F*i;
      return F;
      }
```

DIFFERENZA CON LA VERSIONE RICORSIVA: ad ogni passo viene accumulato un risultato intermedio

FATTORIALE ITERATIVO

```
int fact(int n){
      int i;
      int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
      for (i=2;i <= n; i++)
            F=F*i;
      return F;
      }
```

La variabile F accumula risultati intermedi: se n = 3 inizialmente **F=1** *poi al primo ciclo for* **i=2 F** *assume il valore 2. Infine all'ultimo ciclo for* **i=3 F** *assume il valore 6.*

- **Al primo passo F accumula il fattoriale di 1**
- **Al secondo passo F accumula il fattoriale di 2**
- **Al i-esimo passo F accumula il fattoriale di i**

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- In questo caso il risultato viene sintetizzato *"in avanti"*
- Ogni processo computazionale che computi "in avanti", per accumulo, costituisce una *ITERAZIONE* ossia è un *processo computazionale iterativo.*
- La caratteristica fondamentale di un processo computazionale *ITERATIVO* è che *a ogni passo è disponibile un risultato parziale*
  - dopo k passi, si ha a disposizione il risultato parziale relativo al caso k
  - questo *non è vero* nei processi computazionali *ricorsivi,* in cui nulla è disponibile finché non si è giunti fino al caso elementare.

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- Un processo computazionale iterativo si può realizzare anche tramite funzioni ricorsive

- Si basa sulla disponibilità di una variabile, detta *accumulatore*, destinata a esprimere *in ogni istante* la soluzione corrente

- Si imposta identificando quell'operazione di *modifica dell'accumulatore* che lo porta a esprimere, dal valore relativo al passo k, il valore relativo al passo k+1.

FATTORIALE ITERATIVO

Definizione:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

Detto $v_k = 1 * 2 * 3 * \ldots * k$:

$$1! = v_1 = 1$$

$$(k+1)! = v_{k+1} = (k+1) * v_k \quad \textit{per } k \geq 1$$

$$n! = v_n \quad \textit{per } k=n$$

FATTORIALE ITERATIVO

- Abbiamo visto il calcolo del fattoriale di un numero N tramite procedimento iterativo. Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n){
      int i=1;
      int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/
      while (i < n)
            {F=(i+1)*F;
             i=i+1; }
      return F;
      }
```

DIFFERENZA CON LA VERSIONE RICORSIVA: ad ogni passo viene accumulato un risultato intermedio

ITERAZIONE E RICORSIONE TAIL

- il corpo del ciclo rimane *immutato*
- il ciclo diventa un `if` con, in fondo, la chiamata tail-ricorsiva.

`while (condizione) {`
`  <corpo del ciclo>`
`}`
	`if (condizione) {`
	`  <corpo del ciclo>`
	`  <chiamata ricorsiva>`
	`}`

Naturalmente, può essere necessario *aggiungere nuovi parametri* nell’intestazione della funzione tail-ricorsiva, per “portare avanti” le variabili di stato.

FATTORIALE ITERATIVO

```
int fact(int n){
  return factIt(n,1,1);
}
```

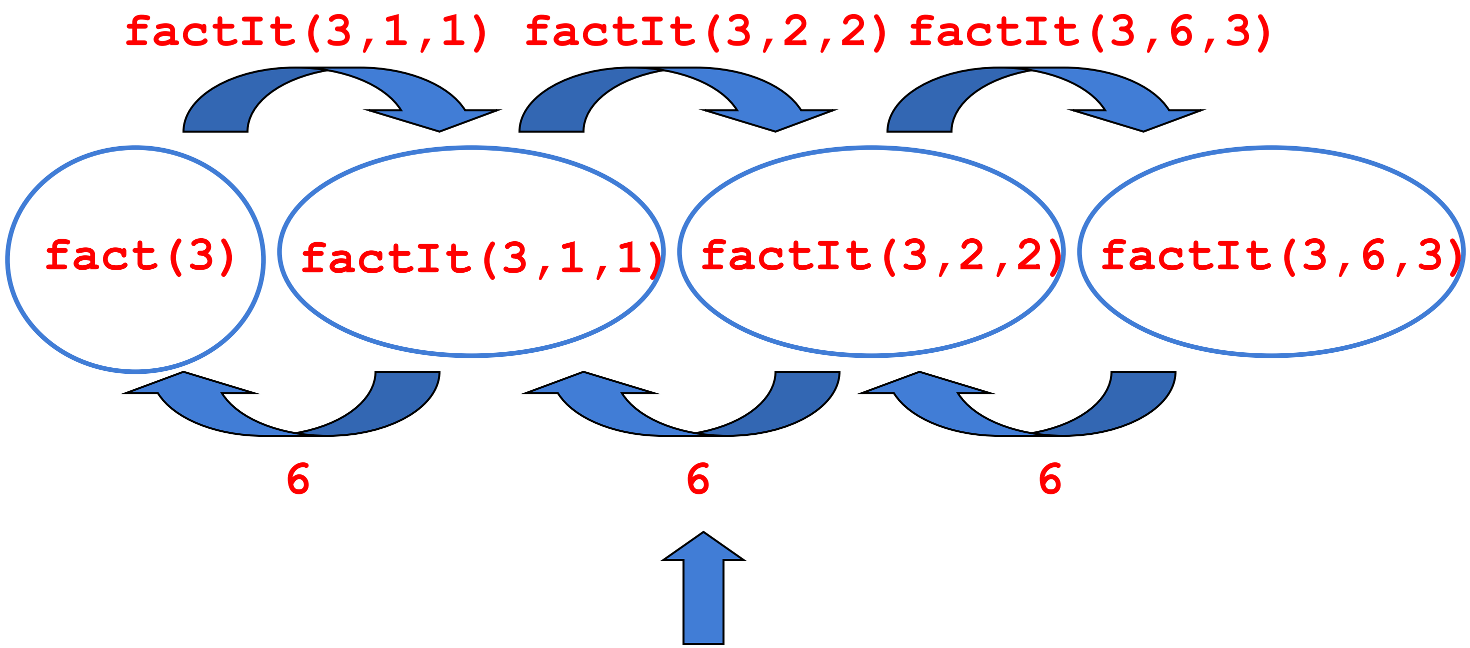
Inizializzazione dell'accumulatore: corrisponde al fattoriale di 1

Contatore del passo

```
int factIt(int n, int F, int i){
  if (i < n)
   {F = (i+1)*F;
    i = i+1;
    return factIt(n,F,i);
   }
  return F;
}
```

Accumulatore del risultato parziale

LA RICORSIONE



Al passo i-esimo viene calcolato il fattoriale di i. Quando i = n l’attivazione della funzione corrispondente calcola il fattoriale di n.
NOTA: ciascuna funzione che effettua una chiamata ricorsiva si sospende, aspetta la terminazione del servitore e poi termina, cioè **NON EFFETTUA ALTRE OPERAZIONI DOPO** come succedeva nel caso del fattoriale ricorsivo vero e proprio che dopo la fine del servitore si doveva effettuare una moltiplicazione

RIASSUMENDO….

- La soluzione ricorsiva individuata per il fattoriale è *sintatticamente ricorsiva* ma dà luogo a un *processo computazionale ITERATIVO*

Ricorsione apparente detta RICORSIONE TAIL

- Il risultato viene sintetizzato *in avanti*
  - ogni passo *decompone e calcola*
  - *e porta in avanti il nuovo risultato parziale* quando le chiamate si chiudono non si fa altro che riportare indietro, fino al cliente, il risultato ottenuto.

RICORSIONE TAIL

- Una ricorsione che realizza un processo computazionale *ITERATIVO* *è una ricorsione apparente*
- la chiamata ricorsiva è *sempre* *l'ultima istruzione*
  - *i calcoli sono fatti prima*
  - *la chiamata serve solo, dopo averli fatti, per proseguire la computazione*
- questa forma di ricorsione si chiama *RICORSIONE TAIL* ("ricorsione in coda")