

LA RICORSIONE

- Una funzione matematica è definita ***ricorsivamente*** quando nella sua definizione compare un riferimento a se stessa.
- La ricorsione consiste nella possibilità di ***definire una funzione in termini di se stessa***
- È basata sul *principio di induzione* matematica:
 - se una proprietà P vale per $n=n_0$  CASO BASE
 - e si può provare che, ***assumendola valida per n*** , allora vale per $n+1$allora P vale per ogni $n \geq n_0$

LA RICORSIONE

Ogni algoritmo ricorsivo è simulabile con un algoritmo iterativo e viceversa. Alcuni risultano più “naturali” in un modo o nell’altro.

Operativamente, risolvere un problema con un ***approccio ricorsivo*** comporta

- **identificare un “caso base”**, con soluzione nota per cui la funzione termina subito
- di riuscire a **esprimere la soluzione al caso generico n in termini dello stesso problema in uno o più casi più semplici** ($n-1$, $n-2$, etc.)

Linguaggi e ricorsione

- Attualmente quasi tutti i linguaggi di alto livello permettono la ricorsione (no vecchie versioni di FORTRAN e BASIC)
- Il C supporta la ricorsione

Esempio: il fattoriale di un numero

`fact(n) = n!`

`n! : Z → N`

`n! vale 1`

`se n ≤ 0`

`n! vale n*(n-1)!`

`se n > 0`

Codifica:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
}  
int main() {  
    int fz, z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

Si valuta l'espressione che costituisce il parametro attuale (nell'environment del main) e si trasmette alla funzione fact() una copia del valore così ottenuto (3)

fact(3) effettuerà poi analogamente una nuova chiamata di funzione fact(2)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}  
  
int main() {  
    int fz, z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

Analogamente, `fact(2)` effettua una nuova chiamata di funzione. ***$n-1$*** nell'environment di `fact()` vale 1 quindi viene chiamata `fact(1)`

E ancora, analogamente, per `fact(0)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
int main() {  
    int fz, z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

Il nuovo servitore lega il parametro n a 0. *La condizione $n \leq 0$ è vera e la funzione fact(0) torna come risultato 1 e termina*

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
int main() {  
    int fz, z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

*Il controllo torna al servitore precedente fact(1) che può valutare l'espressione $n * 1$ ottenendo come risultato 1 e terminando*

E analogamente per fact(2) e fact(3)

LA RICORSIONE: ESEMPIO

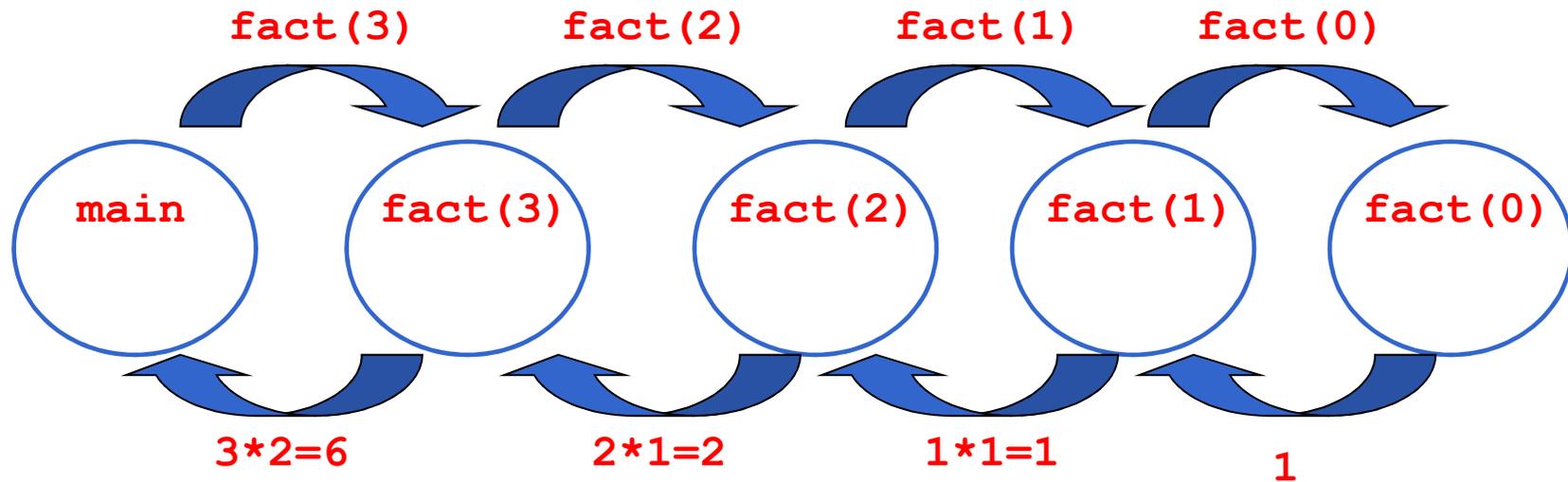
Servitore & Cliente:

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1;  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
int main() {  
    int fz, z = 5;  
    fz = fact(z-2);  
}
```

*il controllo passa infine al main
che assegna a fz il valore 6*

LA RICORSIONE: ESEMPIO



`main` `fact(3) = 3 * fact(2) = 2 * fact(1) = 1 * fact(0)`

Cliente di
`fact(3)`

Cliente di
`fact(2)`
Servitore
del `main`

Cliente di
`fact(1)`
Servitore
di `fact(3)`

Cliente di
`fact(0)`
Servitore
di `fact(2)`

Servitore
di `fact(1)`

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare la somma dei primi N interi

Specifica:

Considera la somma $1+2+3+\dots+(N-1)+N$ come composta di due termini:

- $(1+2+3+\dots+(N-1))$ 
- N  *Valore noto*

Il primo termine non è altro che lo stesso problema in un caso più semplice: calcolare la somma dei primi N-1 interi

Esiste un caso banale ovvio: CASO BASE

- la somma fino a 1 vale 1

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:
calcolare la somma dei primi N interi

Algoritmo ricorsivo

Se N vale 1 allora la somma vale 1

altrimenti la somma vale N + il risultato della
somma dei primi $N-1$ interi

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare la somma dei primi N interi

Codifica:

```
int sommaFinoA(int n) {  
    if (n==1) return 1;  
    else return sommaFinoA(n-1)+n;  
}
```

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

LA RICORSIONE: ESEMPIO

Problema:

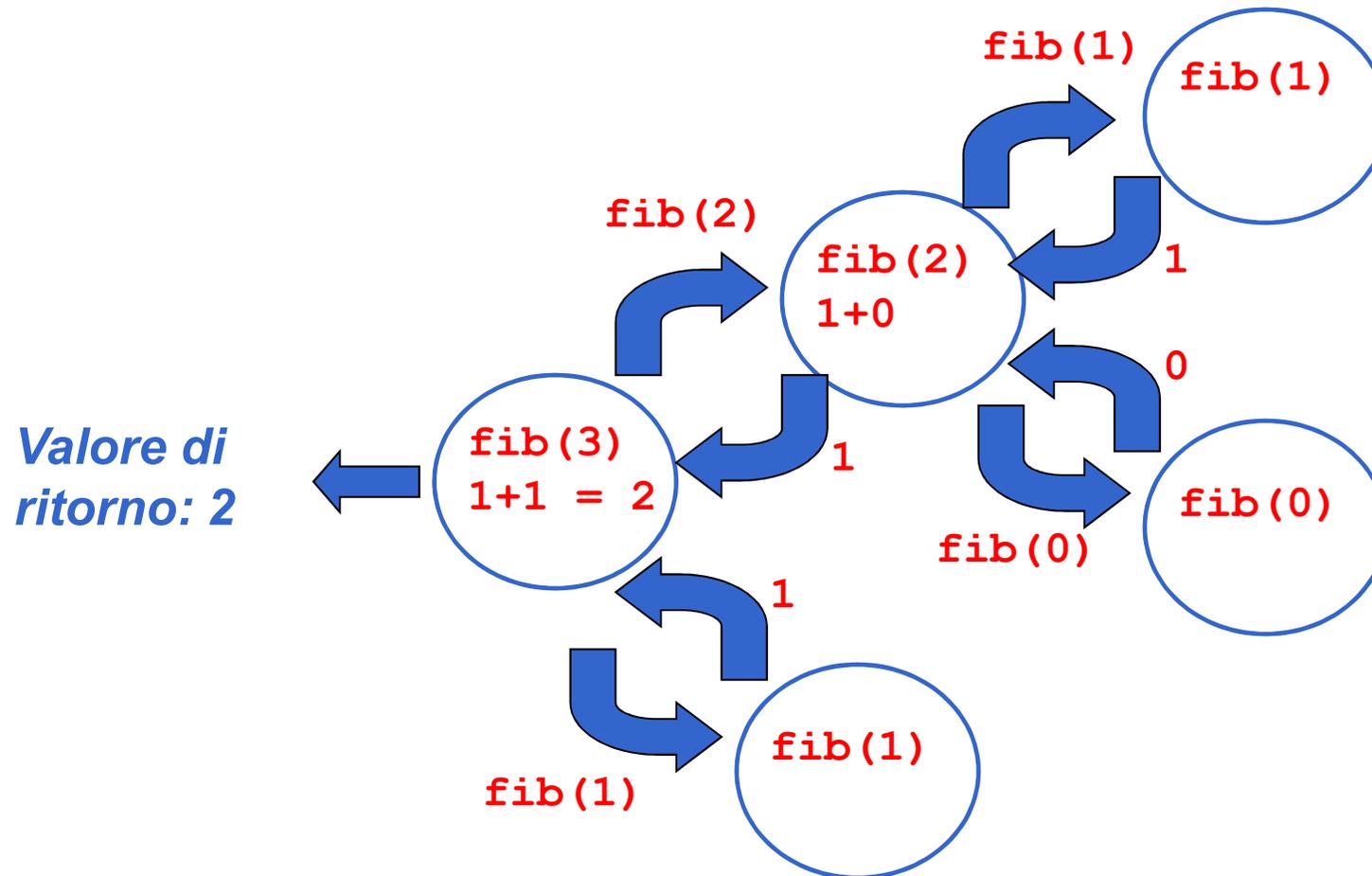
calcolare l'N-esimo numero di Fibonacci

Codifica:

```
unsigned fibonacci(unsigned n) {  
    if (n<2) return n;  
    else return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2) ;  
}
```

Ricorsione non lineare: ogni invocazione del servitore causa due nuove chiamate al servitore medesimo

RICORSIONE NON LINEARE: ESEMPIO



UNA RIFLESSIONE

Negli esempi visti finora si inizia a sintetizzare il risultato **SOLO DOPO** che si sono aperte tutte le chiamate, “*a ritroso*”, mentre le chiamate si chiudono

*Le chiamate ricorsive decompongono via via il problema, **ma non calcolano nulla***

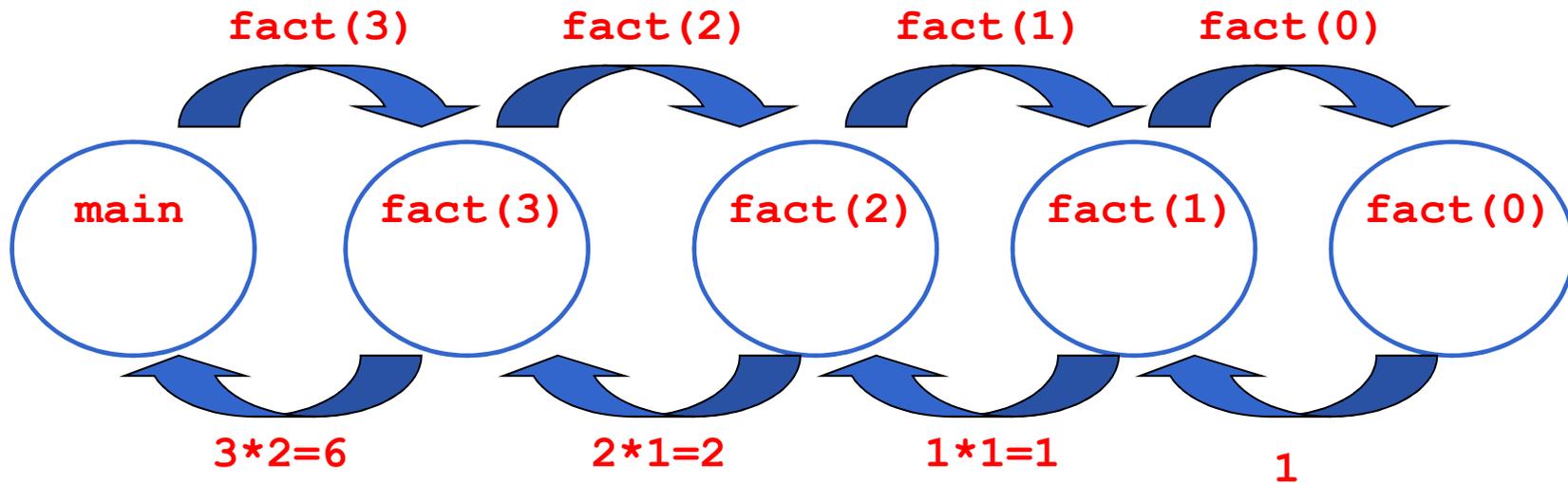
Il risultato viene sintetizzato a partire dalla fine, perché prima occorre arrivare al caso “*banale*”:

- il caso “*banale*” fornisce il valore di partenza
- poi si sintetizzano, “*a ritroso*”, i successivi risultati parziali



Processo computazionale effettivamente ricorsivo

LA RICORSIONE



PASSI:

- 1) `fact(3)` chiama `fact(2)` passandogli il controllo
- 2) `fact(2)` calcola il fattoriale di 2 e termina restituendo 2
- 3) `fact(3)` riprende il controllo ed effettua la moltiplicazione 3×2
- 4) termina anche `fact(3)` e torna il controllo al `main`

PROCESSO COMPUTAZIONALE ITERATIVO

- In questo caso il risultato viene sintetizzato *“in avanti”*
- Ogni processo computazionale che computi “in avanti”, per accumulo, costituisce una **ITERAZIONE**, ossia è un *processo computazionale iterativo*
- La caratteristica fondamentale di un **processo computazionale ITERATIVO** è che **a ogni passo è disponibile un risultato parziale**
 - dopo k passi, si ha a disposizione il risultato parziale relativo al caso k
 - questo **non è vero nei processi computazionali ricorsivi**, in cui nulla è disponibile fino al caso elementare

FATTORIALE ITERATIVO

Definizione:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

Detto $v_k = 1 * 2 * 3 * \dots * k$:

$$1! = v_1 = 1$$

$$(k+1)! = v_{k+1} = (k+1) * v_k \quad \text{per } k \geq 1$$

$$n! = v_n \quad \text{per } k=n$$

FATTORIALE ITERATIVO

Costruiamo ora una funzione che calcola il fattoriale in modo iterativo

```
int fact(int n) {  
    int i=1;  
    int F=1; /*inizializzazione del fattoriale*/  
    while (i <= n)  
        { F=F*i;  i=i+1; }  
    return F;  
}
```

**DIFFERENZA CON LA
VERSIONE RICORSIVA: ad
ogni passo viene
accumulato un risultato
intermedio**

La variabile F accumula risultati intermedi: se $n = 3$ inizialmente $F=1$, poi al primo ciclo $F=1$, poi al secondo ciclo F assume il valore 2. Infine all'ultimo ciclo $i=3$ e F assume il valore 6

- Al primo passo F accumula il fattoriale di 1
- Al secondo passo F accumula il fattoriale di 2
- Al passo i -esimo F accumula il fattoriale di i

FUNZIONI: IL MODELLO A RUN-TIME

Ogni volta che viene invocata una funzione:

- si crea una **nuova attivazione (istanza)** del servitore
- viene **allocata la memoria** per i parametri e per le variabili locali
- si effettua il passaggio dei parametri
- si trasferisce il controllo al servitore
- si esegue il codice della funzione

IL MODELLO A RUN-TIME: ENVIRONMENT

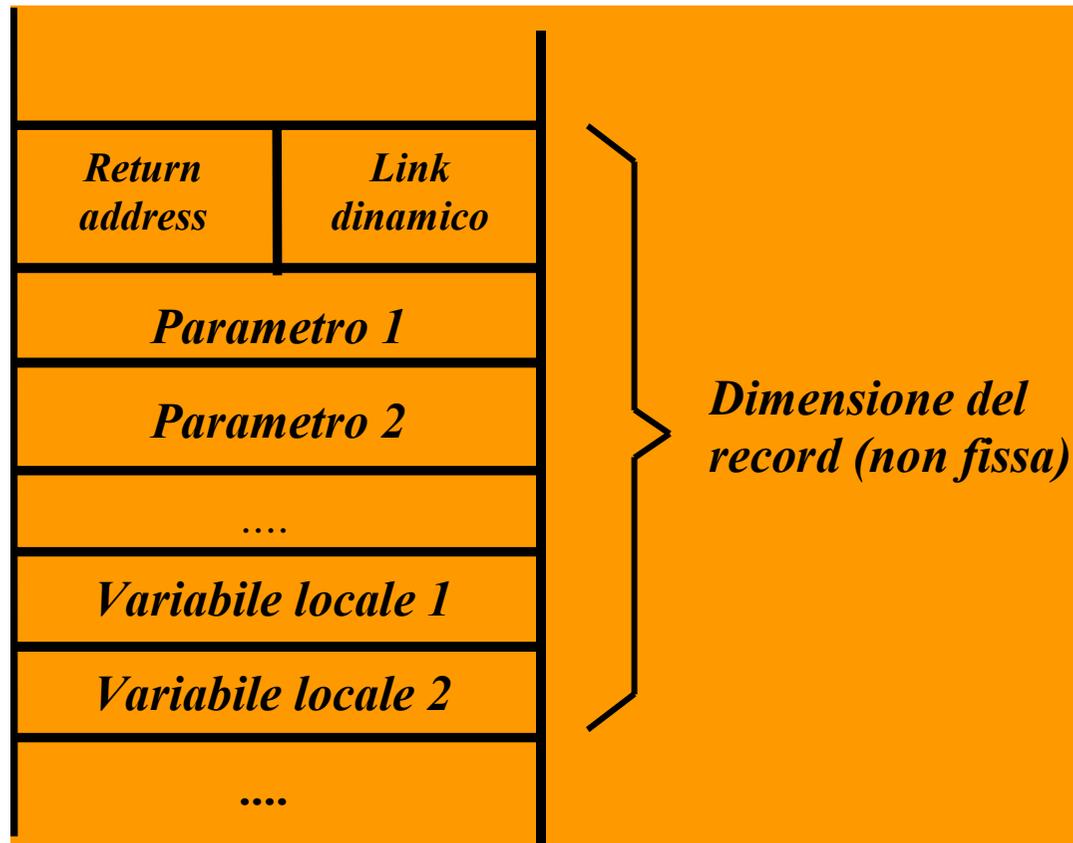
- La definizione di una funzione introduce un ***nuovo binding*** nell'environment in cui la funzione è definita
- Al momento dell'*invocazione*, viene creata una **struttura dati che contiene i *binding* dei parametri e degli identificatori definiti localmente** alla funzione detta ***RECORD DI ATTIVAZIONE***

RECORD DI ATTIVAZIONE

È il “*mondo della funzione*”: *contiene tutto ciò che ne caratterizza l’esistenza*

- **i parametri ricevuti**
- **le variabili locali**
- **l’indirizzo di ritorno (*Return Address RA*)** che indica il punto a cui tornare (nel codice del cliente) al termine della funzione, per permettere al cliente di proseguire una volta che la funzione termina (eventualmente anche uno spazio per salvare altri registri del chiamante che andranno ripristinati al ritorno)
- **un collegamento al record di attivazione del cliente (*Dynamic Link DL*)**

UN POSSIBILE RECORD DI ATTIVAZIONE



RECORD DI ATTIVAZIONE

- Rappresenta il “*mondo della funzione*”: *nasce e muore con essa*
 - è **creato** al momento della **invocazione** di una funzione
 - **permane** per tutto il tempo in cui la funzione è in **esecuzione**
 - è distrutto (**deallocato**) al termine dell’esecuzione della funzione stessa
- Ad **ogni chiamata** di funzione viene **creato un nuovo record**, *specifico per quella chiamata di quella funzione*
- La dimensione del record di attivazione
 - varia da una funzione all’altra
 - *per una data funzione, è fissa e calcolabile a priori*

RECORD DI ATTIVAZIONE

Funzioni che chiamano altre funzioni danno luogo a una ***sequenza di record di attivazione***

- allocati secondo l'ordine delle chiamate
- deallocati in ordine inverso

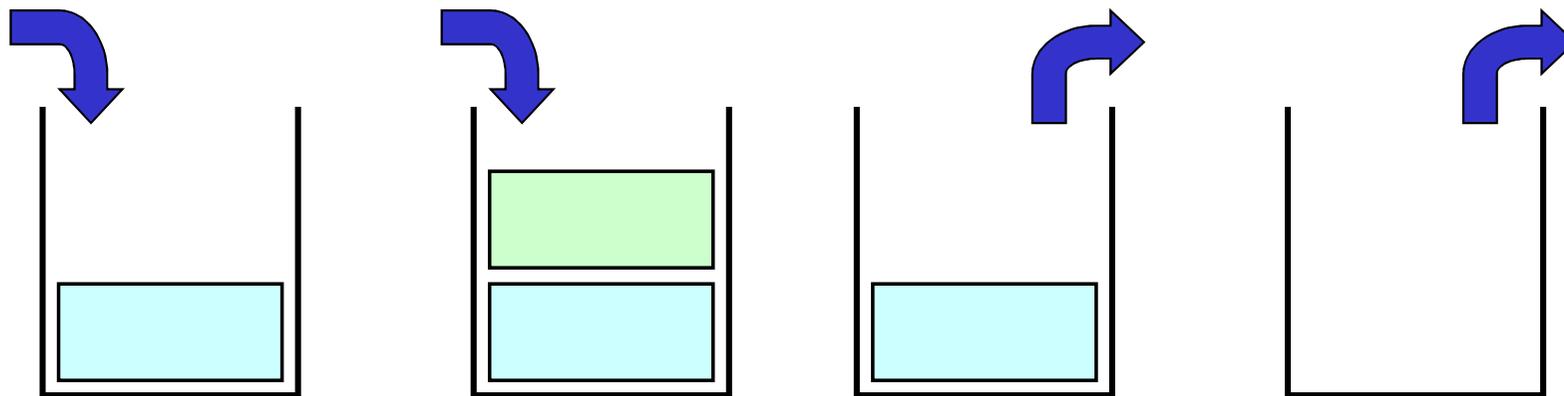
La sequenza dei link dinamici costituisce la cosiddetta *catena dinamica*, che rappresenta *la storia delle attivazioni* (“*chi ha chiamato chi*”)

RECORD DI ATTIVAZIONE

Per catturare la semantica delle chiamate annidate (una funzione che chiama un'altra funzione che...), l'area di memoria in cui vengono allocati i record di attivazione deve essere gestita come una pila

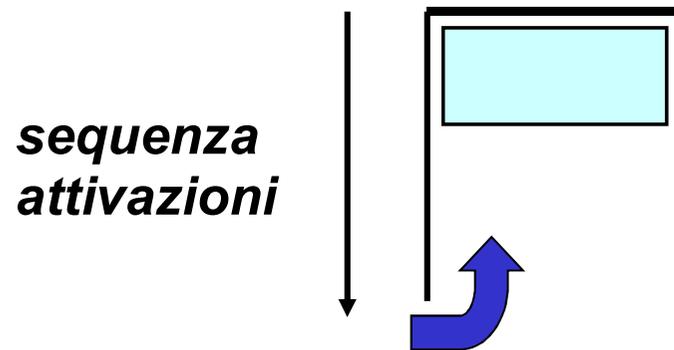
STACK

Una struttura dati gestita con politica LIFO (Last In, First Out - l'ultimo a entrare è il primo a uscire)

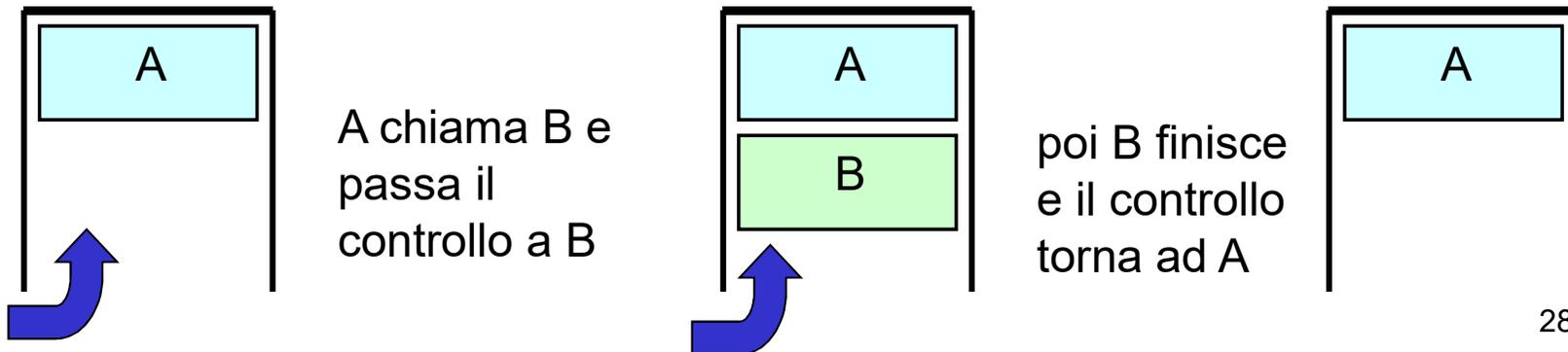


RECORD DI ATTIVAZIONE

Normalmente lo STACK dei record di attivazione si disegna nel modo seguente



Quindi, se la funzione A chiama la funzione B lo stack evolve nel modo seguente



ESEMPIO DI CHIAMATE ANNIDATE

Programma:

```
int R(int A) { return A+1; }  
int Q(int x) { return R(x); }  
int P(void) { int a=10; return Q(a); }  
int main() { int x = P(); }
```

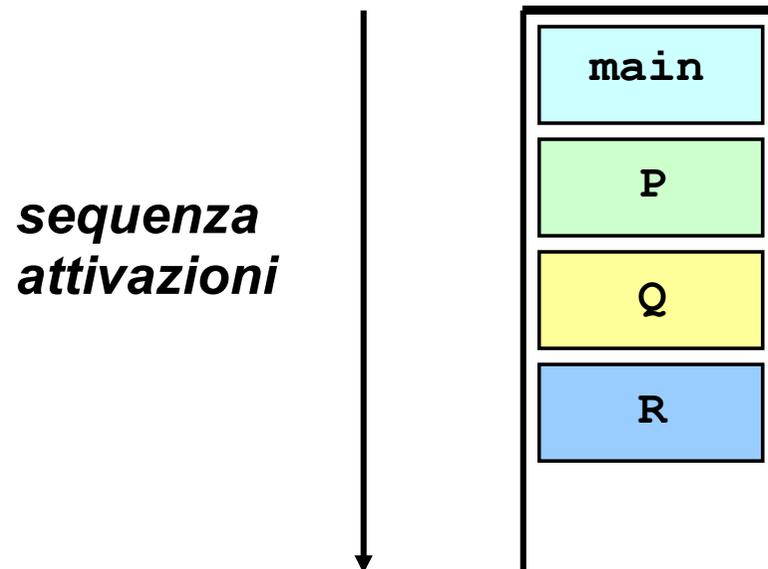
Sequenza chiamate:

$SO \rightarrow \text{main} \rightarrow P() \rightarrow Q() \rightarrow R()$

ESEMPIO DI CHIAMATE ANNIDATE

Sequenza chiamate:

`SO` → `main` → `P()` → `Q()` → `R()`



ESEMPIO: FATTORIALE

```
int fact(int n) {  
    if (n<=0) return 1  
    else return n*fact(n-1);  
}
```

```
int main(){  
    int x, y;  
    x = 2;  
    y = fact(x);  
}
```

NOTA: anche `main()`
è una funzione

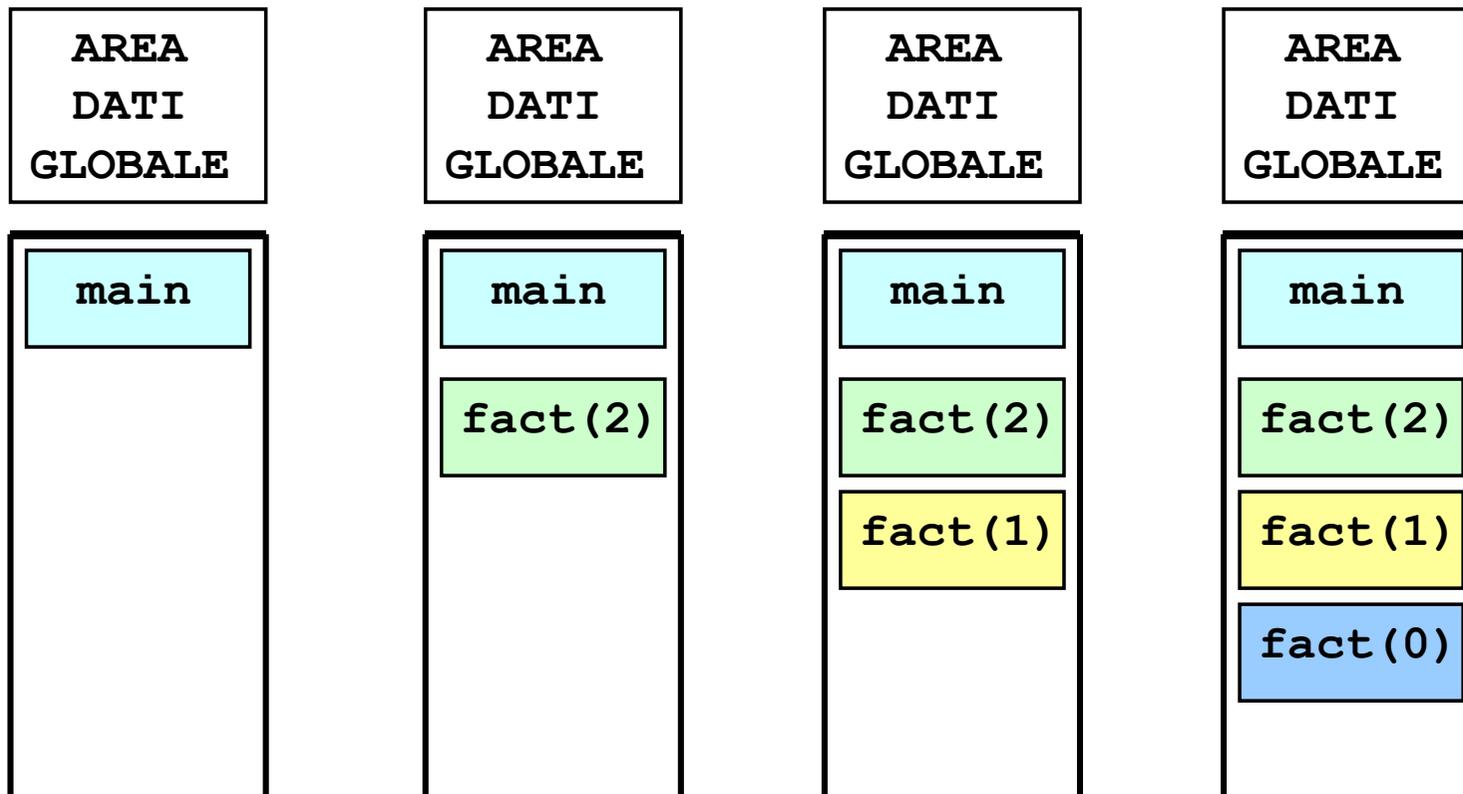
ESEMPIO: FATTORIALE

Situazione all'inizio dell'esecuzione del `main()`

`main()`
chiama
`fact(2)`

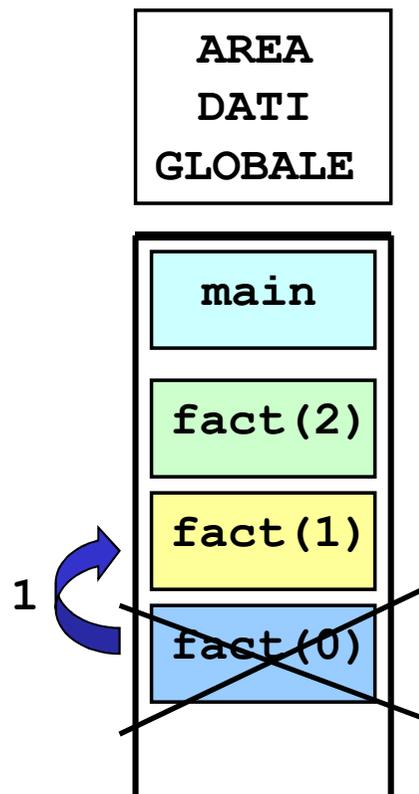
`fact(2)`
chiama
`fact(1)`

`fact(1)`
chiama
`fact(0)`

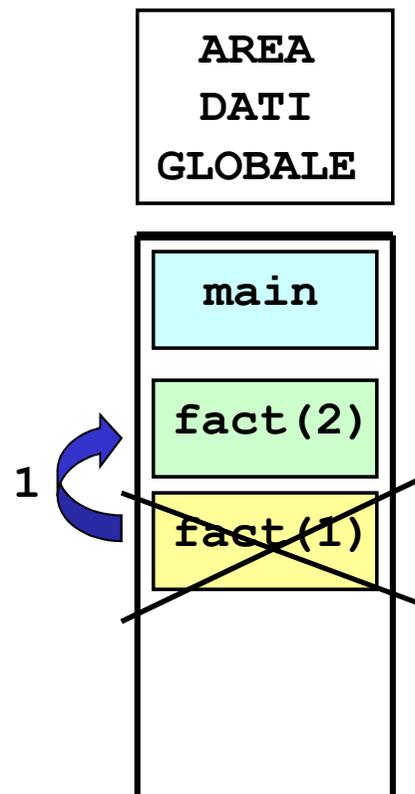


ESEMPIO: FATTORIALE

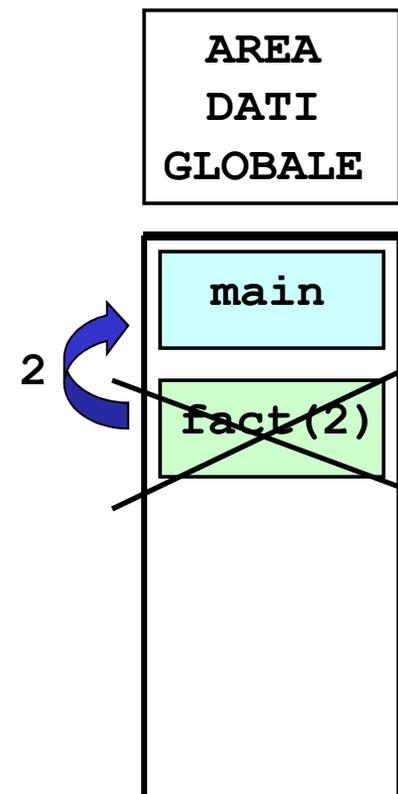
`fact(0)` termina restituendo il valore 1. Il controllo torna a `fact(1)`



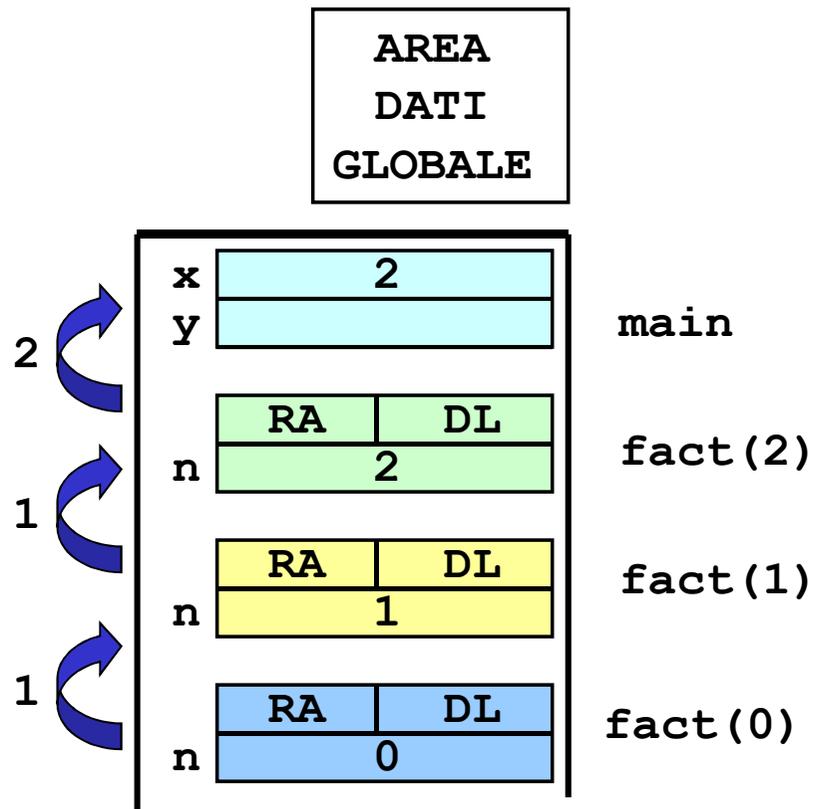
`fact(1)` effettua la moltiplicazione e termina restituendo il valore 1. Il controllo torna a `fact(2)`



`fact(1)` effettua la moltiplicazione e termina restituendo il valore 2. Il controllo torna al `main()`



RECORD DI ATTIVAZIONE IN DETTAGLIO



RICORSIONE vs. ITERAZIONE

A volte processi computazionali *ricorsivi* rispecchiano meglio il problema e/o la ***soluzione del problema*** (ad es. *strutture dati ricorsive* quali liste - le vedremo nel dettaglio più avanti...)

MA:

nei processi computazionali *ricorsivi* ogni funzione che effettua una chiamata ricorsiva deve ***aspettare il risultato del servitore*** per ***effettuare operazioni su questo***; solo ***in seguito può terminare***

→ ***Maggiore occupazione di memoria per record attivazione*** a meno di “ottimizzazioni” da parte del compilatore (*tail recursion optimization* non presente in C e Java, ma utilizzata in Prolog)