

## Logica e risoluzione: esercizi

1

1

## CLAUSOLE

- Una **clausola** è una disgiunzione di letterali (cioè formule atomiche negate e non negate), in cui tutte le variabili sono quantificate universalmente in modo implicito.
- Una clausola generica può essere rappresentata come la disgiunzione:
 
$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \dots \vee \sim B_m$$
 dove  $A_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) e  $B_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) sono atomi.
- Una clausola nella quale non compare alcun letterale, sia positivo sia negativo, è detta **clausola vuota** e verrà indicata con  $\square$ , interpretato come contraddizione: disgiunzione falso  $\vee \sim$ vero
- Un sottoinsieme delle clausole è costituito dalle **clausole definite**, nelle quali si ha sempre un solo letterale positivo:

$$A_1 \vee \sim B_1 \vee \dots \vee \sim B_m$$

2

2

## TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (1)

- Passi per trasformare una qualunque fbf della logica dei predicati del primo ordine in un insieme di clausole

- 1) **Trasformazione in fbf chiusa**

Esempio la formula:

$$- \forall X (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y (q(X,Y) \rightarrow p(Y)))) \quad (1)$$

è trasformata in:

$$- \forall X \forall Y (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y (q(X,Y) \rightarrow p(Y)))) \quad (2)$$

- 2) **Applicazione delle equivalenze per i connettivi logici** (ad esempio  $A \rightarrow B$  è sostituito da  $\sim A \vee B$ ) e la si riduce in forma and-or.

La formula (2) diventa:

$$- \forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y (\sim q(X,Y) \vee p(Y)))) \quad (3)$$

3

3

## TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (2)

- 3) **Applicazione della negazione ad atomi e non a formule composte**, tenendo presente che:

$$\forall X \sim A \quad \text{equivale a} \quad \sim \exists X A$$

$$\exists X \sim A \quad \text{equivale a} \quad \sim \forall X A$$

$$\sim(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \quad \text{equivale a} \quad \sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \dots \wedge \sim A_n$$

$$\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \quad \text{equivale a} \quad \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \dots \vee \sim A_n$$

(leggi di De Morgan).

(3) si modifica in:

$$\forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee (\exists Y (q(X,Y) \wedge \sim p(Y)))) \quad (4)$$

- 4) **Cambiamento di nomi delle variabili**, nel caso di conflitti.

in (4) la seconda variabile Y viene rinominata Z:

$$\forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee (\exists Z (q(X,Z) \wedge \sim p(Z)))) \quad (5)$$

4

4

## TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

- 5) **Spostamento dei quantificatori** in testa alla formula (forma prenessa).

$$\forall X \forall Y \exists Z (\sim p(Y) \vee (q(X,Z) \wedge \sim p(Z))) \quad (6)$$

- 6) **Forma normale congiuntiva** cioè come congiunzione di disgiunzioni, con quantificazione in testa.

$$\forall X \forall Y \exists Z ((\sim p(Y) \vee q(X,Z)) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(Z))) \quad (7)$$

- 7) **Skolemizzazione**: ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

Ad esempio una formula del tipo:  $\forall X \exists Y p(X,Y)$  può essere espressa in modo equivalente come:  $\forall X p(X,g(X))$

In (7) Z è sostituita da  $f(X,Y)$ , perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni  $\forall X$  e  $\forall Y$ :

$$\forall X \forall Y ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y)))) \quad (8)$$

5

5

## TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (4)

- **Perdita in espressività**. Non è la stessa cosa asserire:  $F: \exists X p(X)$  oppure  $F': p(f)$ .

- Vale comunque la proprietà che  $F$  è inconsistente se e solo se  $F'$  è inconsistente.

- 8) **Eliminazione dei quantificatori universali**: si ottiene una formula detta universale (tutte le sue variabili sono quantificate universalmente) in forma normale congiuntiva.

$$((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y)))) \quad (9)$$

- Una formula di questo tipo rappresenta **un insieme di clausole** (ciascuna data da un congiunto nella formula). La forma normale a clausole che si ottiene:  $\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y))\}$  (10)

- La seconda clausola può essere riscritta rinominando le variabili (sostituendo cioè la formula con una sua variante).

$$\{\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y)), \sim p(Z) \vee \sim p(f(W,Z))\} \quad (11)$$

6

6

## TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (5)

- Qualunque teoria del primo ordine  $T$  può essere trasformata in una teoria  $T'$  in forma a clausole.
- Anche se  $T$  non è logicamente equivalente a  $T'$  (a causa dell'introduzione delle funzioni di Skolem), vale comunque la seguente proprietà:

### Proprietà

- Sia  $T$  una teoria del primo ordine e  $T'$  una sua trasformazione in clausole. Allora  $T$  è insoddisfacibile se e solo se  $T'$  è insoddisfacibile.
- Il principio di risoluzione è una procedura di dimostrazione che opera per contraddizione e si basa sul concetto di insoddisfacibilità.

7

7

## IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- Il principio di risoluzione, che si applica a formule in forma a clausole, è molto più efficiente del metodo assiomatico-deduttivo ed è utilizzato dalla maggior parte dei risolutori automatici di teoremi.

- **Logica Proporzionale:** clausole prive di variabili.

- Siano  $C_1$  e  $C_2$  due clausole prive di variabili:

$$C_1 = A_1 \vee \dots \vee A_n \qquad C_2 = B_1 \vee \dots \vee B_m$$

- Se esistono in  $C_1$  e  $C_2$  due letterali **opposti**,  $A_i$  e  $B_j$ , ossia tali che  $A_i = \sim B_j$ , allora da  $C_1$  e  $C_2$ , (clausole **parent**) si può derivare una nuova clausola  $C_3$ , denominata **risolvente**, della forma:

$$C_3 = A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee \dots \vee B_m$$

- $C_3$  è conseguenza logica di  $C_1 \cup C_2$ .

$$\begin{array}{ccc} C1: L \vee C1' & & C2: \neg L \vee C2' \\ & \searrow & \swarrow \\ & C: C1' \vee C2' & \end{array}$$

8

8

## Esercizio 1

- Si trasformi la seguente frase della logica dei predicati del primo ordine nella forma a clausole:
- *"Le case grandi richiedono un grosso lavoro a meno che non abbiano una persona addetta alle pulizie e non abbiano il giardino".*
- Si discuta inoltre se sarebbe possibile trasformarla in clausole di Horn e si motivi la risposta.

9

9

## Esercizio 1

- Si trasformi la seguente frase della logica dei predicati del primo ordine nella forma a clausole:
- *"Le case grandi richiedono un grosso lavoro a meno che non abbiano una persona addetta alle pulizie e non abbiano il giardino".*  

$$\forall H \text{ big}(H) \wedge \text{house}(H) \rightarrow \text{work}(H) \vee \{ \exists M \text{ cleans}(M,H) \}$$

$$\text{and not } \exists G \text{ garden}(G,H)$$
- Si discuta inoltre se sarebbe possibile trasformarla in clausole di Horn e si motivi la risposta.

10

10

## Soluzione Esercizio 1

### 1. Trasformazione in fbf chiuse

### 2. Elimino le implicazioni: $A \rightarrow B$ equivale a $\text{not } A \vee B$

$$\forall H \text{ not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \{\exists M \text{ cleans}(M,H) \wedge \text{not } \exists G \text{ garden}(G,H)\}$$

### 3. Riduzione del connettivo not a soli atomi e non più a formule composte

$$\forall H \text{ not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \{\exists M \text{ cleans}(M,H) \wedge \forall G \text{ not garden}(G,H)\}$$

### 4. Cambiamento di nomi delle variabili (in caso di conflitti).

11

11

## Soluzione Esercizio 1

### 5. Spostamento dei quantificatori in testa alla formula

$$\forall H \exists M \forall G \text{ not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \{\text{cleans}(M,H) \wedge \text{not garden}(G,H)\}$$

### 6. Forma prenessa congiuntiva (congiunzione di disgiunzioni)

$$\forall H \exists M \forall G ((\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{cleans}(M,H)) \wedge (\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{not garden}(G,H)))$$

### 7. Skolemizzazione

$$\forall H \forall G ((\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{cleans}(f(H),H)) \wedge (\text{not big}(H) \vee \text{not house}(H) \vee \text{work}(H) \vee \text{not garden}(G,H)))$$

### 8. Eliminazione dei quantificatori universali

12

12

## Soluzione Esercizio 1

### Forma a clausole:

not big(H)  $\vee$  not house(H)  $\vee$  work(H)  $\vee$   
cleans(f(H),H)

not big(H)  $\vee$  not house(H)  $\vee$  work(H)  $\vee$  not  
garden(G,H)

**La frase non può essere trasformata in clausole di Horn a causa dei letterali positivi: infatti la prima clausola contiene due letterali positivi, mentre le clausole di Horn ne contengono al più uno.**

13

13

## Esercizio 2 - risoluzione

### Si assumano i seguenti fatti:

- A Simone piacciono i corsi facili;
- I corsi di scienze sono difficili;
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.

**Si usi la risoluzione per rispondere alla domanda: Quale corso piace a Simone?**

14

14

## Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

- A Simone piacciono i corsi facili;  
 $\forall X, \forall Y \quad \text{corso}(Y,X), \text{facile}(X) \rightarrow \text{piace}(\text{simone},X)$
- I corsi di scienze sono difficili;  
 $\forall X \quad \text{corso}(\text{scienze}, X) \rightarrow \text{not facile}(X)$
- Tutti i corsi del dipartimento di Intelligenza Artificiale sono facili;  
 $\forall X \quad \text{corso}(\text{ai}, X) \rightarrow \text{facile}(X)$
- BK301 è un corso di Intelligenza Artificiale.  
 $\text{corso}(\text{ai}, \text{bk301})$ .

Goal G:  $\exists X \text{ piace}(\text{simone},X), \text{corso}(Y,X)$

15

15

## Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

**Forma a clausole:**

- Gneg:  $\text{not piace}(\text{simone},X) \vee \text{not corso}(Y,X)$
- C1:  $\text{piace}(\text{simone},X) \vee \text{not corso}(Y,X) \vee \text{not facile}(X)$
- C2:  $\text{not facile}(X) \vee \text{not corso}(\text{scienze},X)$
- C3:  $\text{facile}(X) \vee \text{not corso}(\text{ai},X)$
- C4:  $\text{corso}(\text{ai}, \text{bk301})$

16

16



## Soluzione Esercizio 2 - risoluzione

### Risoluzione

$C5 = G \text{ e } C4 : \text{not piace}(\text{simone}, \text{bk301}) \text{ X/bk301 Y/ai}$

$C6 = C3 \text{ e } C4: \text{facile}(\text{bk301})$

$C7 = C1 \text{ e } C5: \text{not corso}(\text{Y}, \text{bk301}) \vee \text{not facile}(\text{bk301})$

$C8 = C6 \text{ e } C7: \text{not corso}(\text{Y}, \text{bk301})$

$C9 = C8 \text{ e } C4: \text{contraddizione}$

17

17

## Esercizio 3 – compito del 5/11/2003

### Si formalizzino le seguenti frasi in logica dei predicati:

- Esiste almeno uno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.
- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.
- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.
- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.
- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.

**Le si trasformi in clausole e si usi poi il principio di risoluzione per dimostrare che c'è uno studente di Ingegneria che non si contraddice.**

18

18

### Soluzione Esercizio 3

- Esiste almeno studente di Ingegneria che conosce la logica booleana.

$\exists Y$  (**studIng(Y) and conosce(Y,boole)**)

- Chi conosce la logica booleana ha capacità logiche.

$\forall X$  (**conosce(X,boole) => haLogica(X)**)

- Chi non ha capacità logiche, si contraddice.

$\forall X$  (**not haLogica(X) => contraddice(X)**)

- Chi si contraddice, non ha capacità logiche.

$\forall X$  (**contraddice(X) => not haLogica(X)**)

- Piero studia ad ingegneria e conosce la logica booleana.

**studIng(piero) and conosce(piero,boole)**

Goal:  $\exists Y$  **studIng(Y) and not contraddice(Y)**

19

19

### Soluzione Esercizio 3

Clausole:

- **C1 studIng(c)**
- **C2 conosce(c,boole)**
- **C3 not conosce(X,boole) or haLogica(X)**
- **C4 haLogica(X) or contraddice(X)**
- **C5 not contraddice(X) or not haLogica(X)**
- **C6 studIng(piero)**
- **C7 conosce(piero,boole)**
- **C8 not studIng(Y) or contraddice(Y)** (goal negato)

20

20

## Soluzione Esercizio 3

Risoluzione:

- **C9 not haLogica(Y) or not studIng(Y)** (da C5 e C8)
- **C10 not conosce(Y,boole) or not studIng(Y)** (da C9 e C3)
- **C11 not conosce(piero,boole)** (da C10 e C6)
- **C12 Clausola vuota** (da C11 e C7)

21

21

## Esercizio 4

**Si consideri la seguente conoscenza:**

Antonio, Michele e Giovanni sono iscritti al CAI (Club Alpino Italiano). Ogni appartenente al Club che non è sciatore è uno scalatore. Gli scalatori non amano la pioggia. Ogni persona che non ama la neve non è uno sciatore. Antonio non ama ciò che Michele ama. Antonio ama la pioggia e la neve.

**Si rappresenti tale conoscenza come un insieme di predicati del primo ordine appropriati per un sistema di refutazione che lavori mediante risoluzione.**

**Si mostri come tale sistema risolverebbe la domanda: "C'è un membro del CAI che è uno scalatore, ma non uno sciatore?"**

22

22

## Soluzione Esercizio 4

Formule logiche:

1.  $\forall X \text{ iscritto}(X), \text{ not sciatore}(X) \rightarrow \text{scalatore}(X)$
2.  $\forall X \text{ scalatore}(X) \rightarrow \text{not ama}(X, \text{pioggia})$
3.  $\forall X \text{ not ama}(X, \text{neve}) \rightarrow \text{not sciatore}(X)$
4.  $\forall X \text{ ama}(\text{michele}, X) \rightarrow \text{not ama}(\text{antonio}, X)$
5.  $\text{ama}(\text{antonio}, \text{neve})$
6.  $\text{ama}(\text{antonio}, \text{pioggia})$
7.  $\text{iscritto}(\text{antonio})$
8.  $\text{iscritto}(\text{michele})$
9.  $\text{iscritto}(\text{giovanni})$

Goal:  $\exists X \text{ iscritto}(X), \text{ scalatore}(X), \text{ not sciatore}(X)$

23

23

## Soluzione Esercizio 4

**Forma a clausole:**

- C1.  $\text{not iscritto}(X) \vee \text{sciatore}(X) \vee \text{scalatore}(X)$
- C2.  $\text{not scalatore}(X) \vee \text{not ama}(X, \text{pioggia})$
- C3.  $\text{ama}(X, \text{neve}) \vee \text{not sciatore}(X)$
- C4.  $\text{not ama}(\text{michele}, X) \vee \text{not ama}(\text{antonio}, X)$
- C5.  $\text{ama}(\text{antonio}, \text{neve})$
- C6.  $\text{ama}(\text{antonio}, \text{pioggia})$
- C7.  $\text{iscritto}(\text{antonio})$
- C8.  $\text{iscritto}(\text{michele})$
- C9.  $\text{iscritto}(\text{giovanni})$

Gneg:  $\text{not iscritto}(X) \vee \text{not scalatore}(X) \vee \text{sciatore}(X)$

24

24

## Soluzione Esercizio 4

### Risoluzione

C10=Gneg - C8

not scalatore(michele)  $\vee$  sciatore(michele) {X/michele}

C11=C10 - C3

not scalatore(michele)  $\vee$  ama(michele,neve)

C12=C11-C4

not scalatore(michele)  $\vee$  not ama(antonio,neve)

C13=C12 e C5 not scalatore(michele)

C14=C13 e C1 not iscritto(michele)  $\vee$  sciatore(michele)

C15=C13 e C8 sciatore(michele)

C16=C15 e C3 ama(michele,neve)

C17=C16 e C4 not ama(antonio,neve)

C18=C17 e C5 clausola vuota

25

25

## OR esclusivo: come si traduce

- Ogni studente e' promosso o bocciato (or esclusivo)
- VX studente(X) -> promosso (X) or-ex bocciato (X).
- VX studente(X) ->( promosso (X) or bocciato (X) ) and
- (not promosso (X) or not bocciato (X))
- (VX studente(X) -> promosso (X) or bocciato (X)) and
- (VX studente(X) -> not promosso (X) or not bocciato (X))

• C1:

• not studente (X) or promosso (X) or bocciato (X)

• C2:

• not studente(X) or not promosso (X) or not bocciato (X))

26

26